Laurea in Ingegneria Elettronica

Fondamenti di comunicazioni elettriche

Laurea in Ingegneria Informatica e delle telecomunicazioni

Comunicazioni elettriche

Appello – 2 luglio 2013

1) Determinare la densità di probabilità del massimo tra due variabili aleatorie *X* ed *Y*, indipendenti ed aventi densità di probabilità esponenziale con media unitaria

$$f_X(\alpha) = f_Y(\alpha) = e^{-\alpha}\,\mathrm{u}(\alpha)$$

2) Un processo Gaussiano stazionario a media nulla è caratterizzato dalla funzione di autocorrelazione

$$R_n(\tau) = \frac{\cos(2\pi\tau) - \cos(4\pi\tau)}{\pi^2\tau^2}.$$

Determinare la potenza media del processo.
Si determini infine la massima frequenza di campionamento alla quale i campioni del processo possono risultare indipendenti.

3) Un sistema di trasmissione numerica binaria in banda base utilizza come livelli di segnalazione i valori 0 e *A* ed impulsi di segnalazione eventi energia unitaria e soddisfacenti la condizione di annullamento dell'interferenza intersimbolica. La sorgente emette il livello *A* con probabilità tre volte maggiore rispetto a quella con cui emette il livello 0.
Assumendo che l'unico disturbo presente sul canale sia il rumore termico, determinare l'espressione della probabilità d'errore del ricevitore nel caso di regola di decisione a minima probabilità d'errore e confrontarla con quella ottenuta nel caso di regola di decisione a massima verosimiglianza.

Svolgimento

1) Procedendo con la definizione ed osservando che affinché il massimo di un insieme sia minore del parametro γ tutti gli elementi dell'insieme devono essere minori di γ, otteniamo

$$f_Z(\gamma) = \frac{d}{d\gamma}\Pr\{\max(X,Y) \le \gamma\} = \frac{d}{d\gamma}\Pr\{X \le \gamma, Y \le \gamma\} =$$
$$= \frac{d}{d\gamma}\int_{-\infty}^{\gamma}\int_{-\infty}^{\gamma} f_{XY}(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

Ricordando che per variabili indipendenti la densità di probabilità congiunta è il prodotto delle densità marginali ed usando la definizione di distribuzione cumulativa di probabilità, si ottiene

$$f_Z(\gamma) = \frac{d}{d\gamma}\int_{-\infty}^{\gamma} f_X(\alpha)\,d\alpha \int_{-\infty}^{\gamma} f_Y(\beta)\,d\beta =$$
$$= \frac{d}{d\gamma}F_X(\gamma)F_Y(\gamma) = f_X(\gamma)F_Y(\gamma) + F_X(\gamma)f_Y(\gamma)$$

Infine, sostituendo l'espressione di $F_X(\alpha) = F_Y(\alpha) = (1 - e^{-\alpha})\,\mathrm{u}(\alpha)$, si ottiene

$$f_Z(\gamma) = 2e^{-\gamma}(1 - e^{-\gamma})\,\mathrm{u}(\gamma).$$

2) La potenza media di un processo aleatorio stazionario coincide col suo valore quadratico medio, ovvero col valore della funzione di autocorrelazione nell'origine:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[n^2(t)] = R_n(0) &= \lim_{\tau\to 0}\frac{\cos(2\pi\tau)-\cos(4\pi\tau)}{\pi^2\tau^2} = \\ &= \lim_{\tau\to 0}\frac{-2\pi\sin(2\pi\tau)+4\pi\sin(4\pi\tau)}{2\pi^2\tau} = \\ &= \lim_{\tau\to 0}\frac{-(2\pi)^2\cos(2\pi\tau)+(4\pi)^2\cos(4\pi\tau)}{2\pi^2} = \\ &= \frac{-(2\pi)^2+(4\pi)^2}{2\pi^2} = 6\end{aligned}$$

Al fine di determinare le frequenze di campionamento alle quali i campioni del processo risultino indipendenti, occorre trovare i valori di T_s per i quali accade che

$$R_n(nT_s) = \begin{cases} 6 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Sostituendo nella $R_n(\tau)$ si ottiene l'equazione

$$\cos(2\pi n T_s) = \cos(4\pi n T_s) \quad \forall n$$

che conviene riscrivere con la formula di prostaferesi ottenendo l'equazione equivalente

$$\sin(3\pi n T_s)\sin(\pi n T_s) = 0 \quad \forall n$$

Da quest'ultima si ottiene che i campioni del processo sono incorrelati (e quindi indipendenti) scegliendo T_s intero ovvero multiplo intero di $1/3$. La frequenza massima di campionamento utilizzabile soddisfacendo la condizione di campioni indipendenti è quindi pari a 3.

3) Le probabilità con le quali i simboli vengono emessi sono rispettivamente $P_0 = 1/4$ e $P_A = 3/4$. Con le ipotesi del testo, il modello della statistica sufficiente è

$$r_l = a_l + n_l$$

dove n_l è una variabile aleatoria Gaussiana a media nulla e varianza pari ad η (la densità spettrale di potenza del processo di rumore termico). La regola di decisione MAP è

$$\hat{a}_l = \arg\max_{a\in\{0,A\}} f_{n_l}(r_l - a)\Pr\{a_l = a\}$$

ed in questo caso risulta

$$\begin{aligned}\hat{a}_l = 0 &\Leftrightarrow f_{n_l}(r_l)P_0 > f_{n_l}(r_l - A)P_A \\ &\Leftrightarrow r_l < \frac{A}{2} + \frac{\eta}{A}\ln\frac{P_0}{P_A}\end{aligned}$$

La regola di decisione MV si ottiene dalla regola di decisione MAP ponendo $P_0 = P_A$ e risulta quindi

$$\hat{a}_l = 0 \Leftrightarrow r_l < \frac{A}{2}$$

Per quanto riguarda la probabilità d'errore, nel caso MV risulta

$$P(e) = Q\left(\frac{A}{2\sqrt{\eta}}\right),$$

mentre nel caso di regola di decisione MAP risulta

$$
\begin{aligned}
P(e) &= P_A \Pr\{\hat{a}_l = 0 \mid a_l = A\} + P_0 \Pr\{\hat{a}_l = A \mid a_l = 0\} = \\
&= P_A \Pr\{A + n_l < \frac{A}{2} + \frac{\eta}{A} \ln \frac{P_0}{P_A}\} + P_0 \Pr\{n_l > \frac{A}{2} + \frac{\eta}{A} \ln \frac{P_0}{P_A}\} = \\
&= P_A Q(\frac{A}{2\sqrt{\eta}} - \frac{\sqrt{\eta}}{A} \ln \frac{P_0}{P_A}) + P_0 Q(\frac{A}{2\sqrt{\eta}} + \frac{\sqrt{\eta}}{A} \ln \frac{P_0}{P_A})
\end{aligned}
$$