Laurea in Ingegneria Elettronica

Fondamenti di comunicazioni elettriche

Laurea in Ingegneria Informatica e delle telecomunicazioni

Comunicazioni elettriche

Appello – 16 luglio 2013

1) Determinare la densità di probabilità della potenza istantanea di un segnale sinusoidale con ampiezza V_0, frequenza f_0 e fase distribuita in modo uniforme.

2) Si vuole elaborare a tempo discreto un segnale avente densità spettrale di potenza Gaussiana

$$S_x(f) = ae^{-bf^2}.$$

Sapendo che la banda a $-3\,\mathrm{dB}$ del segnale è pari ad f_m e la potenza del segnale è data da P_x, trovare i valori delle costanti a e b. Si consideri infine il campionamento a frequenza $f_s = 2f_m$. Trovare la potenza dell'errore di ricostruzione ammesso di impiegare un filtro anti-aliasing ideale.

3) Determinare le regole di decisione a massima verosimiglianza sui bit per una modulazione 16-QAM con mapping di Gray su canale AWGN. Le espressioni ricavate devono essere espresse come condizioni logiche sulle componenti z_k^I e z_k^Q della statistica sufficiente all'ingresso del decisore.

Svolgimento

1) Per determinare la densità di probabilità richiesta possiamo procedere con la definizione

$$f_{v^2(t)}(\beta) = \frac{d}{d\beta}\Pr\{v^2(t) \le \beta\}.$$

Una espressione del segnale è data da

$$v(t) = V_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

la cui potenza istantanea è data da

$$v^2(t) = V_0^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{V_0^2}{2}\left[1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi)\right].$$

Osserviamo che l'unico caso da discutere è $0 < \beta < V_0^2$ in quanto altrimenti l'evento da misurare risulta certo o impossibile. Vista l'uniformità della fase φ, si può porre senza perdita di generalità $t = 0$ e studiare il problema per φ uniforme in $[0,\pi]$, in modo da considerare un solo periodo di $\cos(2\varphi)$.

Nel caso in oggetto la diseguaglianza è soddisfatta per

$$\cos(2\varphi) \le \frac{2\beta}{V_0^2} - 1$$

che si può studiare in termini della funzione inversa del coseno:

$$\cos(x) < y \Leftrightarrow x \in \bigcup_k [2k\pi + \arccos(y), 2(k+1)\pi - \arccos(y)]$$

ottenendo

$$\varphi \in \left[\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\beta}{V_0^2} - 1\right), \pi - \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\beta}{V_0^2} - 1\right)\right]$$

$$\Pr\{v^2(t) \le \beta\} = \begin{cases} 0 & \beta < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{\pi}\arccos(\dfrac{2\beta}{V_0^2} - 1) & 0 < \beta < V_0^2 \\ 1 & \beta > V_0^2 \end{cases}$$

Infine, derivando si ottiene

$$f_{v^2(t)}(\beta) = \frac{1}{\pi}\frac{2 / V_0^2}{\sqrt{1 - \left(2\beta / V_0^2 - 1\right)^2}}\operatorname{rect}(\frac{\beta - V_0^2 / 2}{V_0^2})$$

2) La condizione sulla banda a $-3\,\mathrm{dB}$ è

$$S_x(f_m) = \frac{1}{2}S_x(0)$$

da cui si ottiene

$$b = f_m^{-2}\ln 2\,.$$

La condizione sulla potenza è

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df$$

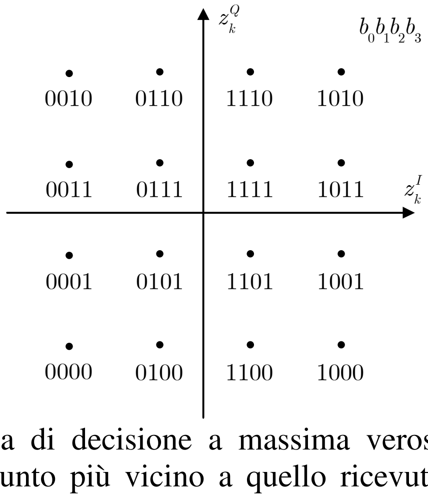
da cui risulta

$$a = \sqrt{\frac{b}{\pi}}P_x = \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}\frac{P_x}{f_m}\,.$$

In presenza di filtro anti-aliasing ideale, la potenza dell'errore di ricostruzione è pari alla potenza della parte di segnale che non è possibile rappresentare alla frequenza di campionamento prescelta:

$$P_e = \int_{-\infty}^{-f_s/2} S_x(f)df + \int_{f_s/2}^{\infty} S_x(f)df = P_x 2Q(\sqrt{2\ln 2})$$

3) Un possibile mapping di Gray della 16-QAM è quello riportato in figura (IEEE Std 802.11a-1999)



Ricordando che la regola di decisione a massima verosimiglianza si può ricondurre al problema di scelta del punto più vicino a quello ricevuto, e denotata con d la distanza minima della costellazione, si trova

$$\begin{aligned}
\hat{b}_0 &= z_k^I > 0 \\
\hat{b}_1 &= \left|z_k^I\right| < d \\
\hat{b}_2 &= z_k^Q > 0 \\
\hat{b}_3 &= \left|z_k^Q\right| < d
\end{aligned}$$