Appunti / Errata

Volume I - Fondamenti

Capitolo 1

Pagina 1, equazione (1.2) per l'argomento di un segnale

$$\angle s(t) = \arctan\frac{\mathrm{Im}\{s(t)\}}{\mathrm{Re}\{s(t)\}} + \pi\,\mathrm{u}(-\mathrm{Im}\{s(t)\}) + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$$

Pagina 4, proprietà del cambio di scala

$$\mathrm{FT}[s(at)] = \frac{1}{|a|} S(f/a) \text{ per } a \neq 0$$

la contrazione dell'asse dei tempi (dilatazione dell'asse delle frequenze) corrisponde ad un parametro $|a| > 1$, non $a > 0$.

Pagina 9, equazioni (1.34) ed (1.35) per il calcolo della potenza e dell'energia di un segnale a tempo discreto

$$P_s = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |s(nT)|^2$$

$$E_s = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |s(nT)|^2 T$$

Pagina 13, equazione (1.54) per la distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta

$$D_X(x) = \sum_{k\in\Omega} \Pr[X = k]\,\mathrm{u}(x-k)$$

oppure (attenzione al segno di disuguaglianza)

$$D_X(x) = \sum_{k\le x} \Pr[X = k]$$

Capitolo 2

Nota: nell'analisi in regime sinusoidale condotta in elettrotecnica, ad una forma d'onda sinusoidale $v(t) = V_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$ è associato il fasore $\dot{V} = V_0 e^{j\varphi_0}$. Il fasore coincide con il coefficiente dell'impulso di Dirac presente nella trasformata di Fourier del segnale analitico:

$$\mathrm{FT}[v^+(t)] = 2\,\mathrm{u}(f)\,\mathrm{FT}[v(t)] = V_0 e^{j\varphi_0} \delta(f - f_0)$$

Pagine 25-26, le considerazioni che portano all'equazione (2.11) non sono necessarie, visto che la densità spettrale di potenza si riferisce alla componente stazionaria, quindi nelle (2.11) e (2.12) si può sostituire $P_Y(f)$ a $P_Z(f)$.

Pagina 27, equazione (2.17), il 2 è ad esponente.

Pagine 32 e 33, v_x può essere sostituita da una più semplice $V_u = HV_i$ dove H è la funzione di trasferimento in tensione del doppio bipolo. Analogamente, $W_{d_{gR}}$ può essere sostituita da W_{du}, ed il guadagno di potenza disponibile può essere scritto come

$$G_d = \frac{W_{du}}{W_{dg}} = \frac{P_{v_u} / 4R_u}{P_{v_g} / 4R_g} = \frac{R_g}{R_u} |H_i|^2 |H|^2$$

con $H_i = Z_i / (Z_g + Z_i)$. Si noti che questa è la notazione del capitolo 3.

Capitolo 3

Pagina 40, formula (3.6), va evidenziato che il ritardo di propagazione delle onde è il ritardo di fase e si calcola come il rapporto tra la distanza percorsa e la velocità della luce nel mezzo alla frequenza f.

Pagina 44, figura 3.5, l'asse orizzontale delle frequenze non è in scala lineare, e nemmeno in scala logaritmica, ma bensì in una scala con compressione della dinamica (ad esempio: $\hat{f} = \mathrm{sgn}(f)\log(1+|f|/10^8)$).

Pagina 53, considerazioni alla fine del paragrafo 3.4.2, in genere è più efficace porre per primi i sistemi con basso fattore di rumore, purché abbiano un $G_d > 1$ (ovvero non attenuino).

Capitolo 4

Nota: ovunque appaiano, $f_1\{m_1(t)\}$ ed $f_2\{m_2(t)\}$ vanno intese come $f_1\{m(t)\}$ ed $f_2\{m(t)\}$, in quanto $m(t) = m_1(t) + jm_2(t)$ e non è detto che i funzionali $f_1\{\cdot\}$ ed $f_2\{\cdot\}$ operino sulla sola parte reale o sulla sola parte immaginaria dell'argomento.

Pagina 69, equazione (4.21), densità spettrale di potenza

$$P_S(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left| \mathrm{FT}\left[s(t)\,\mathrm{rect}(t/T) \right] \right|^2 .$$

Pagina 73, l'equazione (4.29) è la componente stazionaria (media temporale) della funzione di autocorrelazione richiesta per il calcolo della densità spettrale di potenza (teorema di Wiener-Khintchine).

Pagina 76, equazione (4.33), pagina 78, equazione (4.36) e tabella (4.1), $h_v(t)$ non è la risposta impulsiva del filtro passa-banda con simmetria vestigiale intorno ad f_p descritta dalla (4.32) e dalla figura 4.15, ma è bensì la risposta impulsiva di un filtro simile al filtro di Hilbert (ma realizzabile), avente risposta in frequenza:

$$\hat{H}_v(f) = jH_v(f - f_p) - jH_v(f + f_p) .$$

Pagina 84, equazione (4.44), k_ϕ invece di k_φ.

Pagina 85, equazione (4.51), si tratta dello spettro di densità di potenza $P_{ae^{j\alpha(t)}}(f)$ ed il paragrafo di quattro righe seguente è la discussione necessaria a passare dallo spettro di densità di energia a quello di potenza (ma l'espressione è direttamente quella relativa allo spettro di potenza).

Pagine 93 e seguenti, invece di distinguere tra il caso bilivello ed il caso multilivello, tratto il formatore di impulsi come una generica mappa tra sequenze di bit b_k aventi cadenza di bit $f_b = 1/T_b$ ed una sequenza di valori (trasportati da impulsi) v_n aventi cadenza $f_L = 1/T_L$. Nel caso bilivello non codificato si ottiene $T_L = T_b$.

Pagina 99, l'espressione (4.81) può essere riscritta come segue

$$
\begin{aligned}
g(t) = {} & \frac{1-\gamma}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{(1-\gamma)t}{T_L}\right) + \frac{1+\gamma}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{(1+\gamma)t}{T_L}\right) + \\
& + \frac{\gamma}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{T_L}\right)\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{2\gamma t - T_L}{2T_L}\right) - \operatorname{sinc}\left(\frac{2\gamma t + T_L}{2T_L}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Questa espressione, sebbene più complessa di quella presentata sul testo, non presenta problemi di carattere numerico in corrispondenza a $\gamma\pi t = \pm T_L$.

Analogamente è possibile ricavare l'espressione degli impulsi a radice di coseno rialzato come segue

$$
\begin{aligned}
g(t) = {} & \sqrt{T_L}\,\frac{\sin\left(\frac{(1-\gamma)\pi t}{T_L}\right) + \frac{4\gamma t}{T_L}\cos\left(\frac{(1+\gamma)\pi t}{T_L}\right)}{\pi t\left(1-\frac{4\gamma t}{T_L}\right)\left(1+\frac{4\gamma t}{T_L}\right)} = \\
= {} & \frac{1-\gamma}{\sqrt{T_L}}\operatorname{sinc}\left(\frac{(1-\gamma)t}{T_L}\right) + \frac{\gamma}{\sqrt{T_L}}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi t}{T_L}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{1}{4} + \frac{\gamma t}{T_L}\right) + \\
& + \frac{\gamma}{\sqrt{T_L}}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi t}{T_L}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{1}{4} - \frac{\gamma t}{T_L}\right)
\end{aligned}
$$

Dove la seconda espressione, sebbene meno compatta, non presenta problemi di carattere numerico per $4\gamma t = \pm T_L$ (l'assenza di problemi numerici è legata al fatto che la valutazione di $\operatorname{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$ non soffre di cancellazione numerica).

Capitolo 6

Pagina 154, equazione (6.18), il fattore $1/2$ si spiega considerando che la trasformata di Fourier dell'inviluppo complesso ha ampiezza doppia rispetto alla trasformata di Fourier del segnale in banda traslata.

Pagine da 159 a 162, $\underline{H}_{RX}(f)$ non è complessa, ma corrisponde ad una risposta all'impulso del sistema $\underline{h}_{RX}(t) = \operatorname{Re}\{\underline{h}_{RX}(t)\} - i\operatorname{Im}\{\underline{h}_{RX}(t)\}$ a valori complessi. Con $\operatorname{Re}\{\underline{H}_{RX}(f)\}$ ed $\operatorname{Im}\{\underline{H}_{RX}(f)\}$, si intendono le trasformate delle due componenti, rispettivamente a simmetria Hermitiana (trasformata di un segnale reale) e ad antisimmetria Hermitiana (trasformata di un segnale a valori puramente immaginari).

Pagine 171-176, pagine 188-192, relativamente alla probabilità di errore dei sistemi di modulazione numerica lineare:

Il segnale modulato ha la forma:

$$s_{TX}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n h_{TX}(t - nT) \; .$$

Il segnale ricevuto, nel caso di canale perfetto affetto da rumore additivo Gaussiano bianco (stazionario ed a media nulla), ha la forma:

$$s_{RX}(t) = \frac{1}{a} s_{TX}(t - \tau) + n(t) \; .$$

A valle del filtro di ricezione, avente funzione di trasferimento $H_{RX}(f)$, si ha:

$$r(t) = h_{RX}(t) * s_{RX}(t) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n g(t - \tau - nT) + n_{h_{RX}}(t) \; ,$$

dove $g(t) = h_{TX}(t) * h_{RX}(t)$ è l'impulso di segnalazione equivalente dato dal prodotto di convoluzione dei filtri di trasmissione e di ricezione, ed $n_{h_{RX}}(t) = n(t) * h_{RX}(t)$ è il processo di rumore filtrato. Questo processo è Gaussiano, a media nulla, con densità spettrale di potenza data da $P_{n_{h_{RX}}}(f) = \frac{N_0}{2} |H_{RX}(f)|^2$ e potenza data da $P_{n_{h_{RX}}}(f) = N_0 E_{h_{RX}} / 2$.

Per estrarre dal processo ricevuto le variabili aleatorie utili alle decisioni si campiona il processo a passo coincidente con il periodo di segnalazione ed un ritardo τ_{RX}, da scegliere al ricevitore in modo da compensare i ritardi introdotti dal canale e dai sistemi di trasmissione e ricezione, ottenendo:

$$a \cdot r(lT + \tau_{RX}) = v_l g(0) + \underbrace{\sum_{n \neq l} v_n g((l - n)T)}_{\text{ISI}} + a \cdot n_{h_{RX}}(lT + \tau_{RX}) \; .$$

Facendo l'ipotesi che valga la condizione di annullamento dell'interferenza intersimbolica (ISI), data da

$$g((l - n)T) = \begin{cases} g(0) & l = n \\ 0 & l \neq n \end{cases}$$

Ovvero, nel dominio della frequenza, da

$$\sum_k G\left(f - \frac{k}{T}\right) = g(0) \cdot T \; ,$$

si perviene alla semplice espressione equivalente:

$$r_l = v_l + n_l$$

Dove $r_l = a \cdot r(lT + \tau_{RX}) / g(0)$ e $n_l = a \cdot n_{h_{RX}}(lT + \tau_{RX}) / g(0)$. I valori n_l sono Gaussiani, a media nulla e varianza data da $\sigma^2 = \dfrac{N_0 a^2 E_{h_{RX}}}{2g^2(0)}$. Non risultano in generale indipendenti, a meno che non sia soddisfatta la condizione:

$$E\left[n_k n_l^*\right] = \frac{a^2}{g^2(0)} \frac{N_0}{2} \int h_{RX}(\tau) h_{RX}^*((l-k)T + \tau) d\tau = \begin{cases} \sigma^2 & l = k \\ 0 & l \neq k \end{cases}$$

Si dimostra facilmente che è possibile soddisfare sia la condizione di indipendenza dei campioni di rumore filtrato, sia l'annullamento dell'interferenza intersimbolica sul canale perfetto, scegliendo il filtro di ricezione adattato all'impulso di segnalazione ed entrambi con la forma a radice di coseno rialzato (RCR).

Per dedurre la regola di decisione da impiegare nel caso di modulazione lineare sul canale perfetto affetto da rumore AWGN in condizioni di annullamento dell'interferenza intersimbolica, ovvero nel caso in cui il modello equivalente del sistema di trasmissione è dato da $r_l = v_l + n_l$, si deve considerare che il decisore ha a disposizione, relativamente al simbolo l-esimo, solo il valore osservato r_l, e che i termini di rumore sono indipendenti e quindi è possibile effettuare le decisioni simbolo per simbolo.

Il criterio di decisione sarà quindi basato sull'appartenenza della variabile aleatoria r_l ad una regione di decisione R associata al valore di tensione (il "punto di costellazione" nel caso PSK/QAM) da stimare:

$$\hat{v}_l = \begin{cases} V_0 & r_l \in R_0 \\ V_1 & r_l \in R_1 \\ \vdots & \\ V_{L-1} & r_l \in R_{L-1} \end{cases}$$

Si noti che le regioni di decisione devono costituire una partizione dell'insieme dei valori che la variabile di decisione r_l può assumere.

Considerando per semplicità il caso binario, la probabilità di errore sul simbolo può essere espressa come

$$\begin{aligned} P(e) &= \Pr(\hat{v}_l \neq v_l) = \Pr(\hat{v}_l = V_1, v_l = V_0) + \Pr(\hat{v}_l = V_0, v_l = V_1) = \\ &= P_0 \Pr(\hat{v}_l = V_1 \mid v_l = V_0) + P_1 \Pr(\hat{v}_l = V_0 \mid v_l = V_1) = \\ &= P_0 \Pr(r_l \in R_1 \mid r_l = V_0 + n_l) + P_1 \Pr(r_l \in R_0 \mid r_l = V_1 + n_l) = \\ &= P_0 \Pr(V_0 + n_l \in R_1) + P_1 \Pr(V_1 + n_l \in R_0) \end{aligned}$$

Dove con P_0 e P_1 si sono indicate rispettivamente le probabilità di emissione dei valori V_0 e V_1, e si è applicata la formula di Bayes considerando il legame di causalità esistente tra v_l, r_l e $\hat{v}_l$.

Per arrivare al risultato desiderato, si consideri che sommando alla variabile aleatoria n_l una costante si ottiene una variabile aleatoria avente densità di probabilità traslata intorno alla costante, per cui la probabilità di errore può essere scritta come

$$
\begin{aligned}
P(e) &= \int_{R_1} P_0 f_{n_l}(x-V_0)dx + \int_{R_0} P_1 f_{n_l}(x-V_1)dx = \\
&= P_0\left(1-\int_{R_0} f_{n_l}(x-V_0)dx\right) + \int_{R_0} P_1 f_{n_l}(x-V_1)dx = \\
&= P_0 - \int_{R_0} P_0 f_{n_l}(x-V_0) - P_1 f_{n_l}(x-V_1)dx
\end{aligned}
$$

Ora, affinché la probabilità di errore sia minima, l'argomento dell'integrale deve risultare sempre positivo all'interno della regione R_0, ovvero la regione di decisione è definita dalla relazione:

$$
R_0 = \left\{x : P_0 f_{n_l}(x-V_0) - P_1 f_{n_l}(x-V_1) > 0\right\}
$$

Più in generale, si trova che la regola di decisione è data da

$$
\hat{v}_l = \arg\max_V \Pr(v_l = V) f_{n_l}(r_l - V)
$$

Sul canale perfetto affetto da rumore additivo Gaussiano bianco si ha

$$
f_{n_l}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}
$$

E nel caso binario antipodale in cui $V_0 = V$ e $V_1 = -V$, con simboli equiprobabili (caso della massima verosimiglianza), si ottiene

$$
\hat{v}_l = V_0 \Leftrightarrow r_l(V_0 - V_1) > \frac{V_0^2 - V_1^2}{2} + \sigma^2 \ln\frac{P_1}{P_0} \Leftrightarrow r_l > 0
$$

La probabilità di errore risulta

$$
\begin{aligned}
P(e) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f_{n_l}(x-V)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} f_{n_l}(x+V)dx = \\
&= \frac{1}{2}\Pr\left\{V + \sigma N(0,1) < 0\right\} + \frac{1}{2}\Pr\left\{-V + \sigma N(0,1) > 0\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\Pr\left\{-N(0,1) > \frac{V}{\sigma}\right\} + \frac{1}{2}\Pr\left\{N(0,1) > \frac{V}{\sigma}\right\} = \\
&= Q\left(\frac{V}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{V}{\sqrt{2}\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

Dove si è utilizzata la funzione $Q(x) \triangleq \Pr\left\{N(0,1) > x\right\}$ ed il fatto che la variabile n_l può essere rappresentata come una variabile normale con media nulla e varianza unitaria $N(0,1)$ moltiplicata per la deviazione standard σ.

Volume II – Approfondimenti

Capitolo 2

Pagina 25, figura 2.5, i primi livelli di quantizzazione vanno etichettati con q_0, q_1, q_2 e va aggiunta l'etichetta q_3.

Relativamente alla legge di quantizzazione, a lezione sono state dettagliate le equazioni della legge di quantizzazione ottima.

Un quantizzatore ha come obiettivo l'approssimazione dei valori di una generica variabile aleatoria X con valori appartenenti ad un insieme finito di valori q_i. Più in dettaglio, una legge di quantizzazione può essere scritta come

$$q(X) = \left\{ \begin{matrix} q_0 & x_0 < X \le x_1 \\ q_1 & x_1 < X \le x_2 \\ \vdots & \vdots \\ q_{M-1} & x_{M-1} < X \le x_M \end{matrix} \right\} = q_i : x_i < X \le x_{i+1}$$

ed è caratterizzata dagli M valori q_i e dalle $M+1$ soglie x_i. Quando la variabile da quantizzare assume valori limitati in un intervallo $[X_{\min}, X_{\max}]$, si sceglie $x_0 = X_{\min}$ e $x_M = X_{\max}$; quando invece la variabile non ammette limiti superiori o inferiori si pone $x_0 = -\infty$ e $x_M = +\infty$. Si ha quindi che il numero di incognite da determinare per una generica legge di quantizzazione è pari a $2M-1$.

Denotato con $e_q(X) = q(X) - X$ l'errore di quantizzazione e con $f_X(x)$ la densità di probabilità di X, il valore quadratico medio dell'errore di quantizzazione, ovvero la potenza del processo degli errori nel caso in cui X sia un valore di una sequenza di valori da quantizzare, risulta

$$\mathrm{E}\left[e_q^2(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(q(x) - x\right)^2 f_X(x)dx = \sum_{i=0}^{M-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(q_i - x\right)^2 f_X(x)dx$$

Al fine di determinare le equazioni della legge di quantizzazione, calcoliamo le derivate parziali rispetto alle variabili x_j e q_j ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathrm{E}\left[e_q^2(X)\right] &= \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=0}^{M-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(q_i - x\right)^2 f_X(x)dx = \\ &= \left(q_{j-1} - x_j\right)^2 f_X(x_j) - \left(q_j - x_j\right)^2 f_X(x_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_j} \mathrm{E}\left[e_q^2(X)\right] &= \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=0}^{M-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(q_i - x\right)^2 f_X(x)dx = \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(q_j - x\right)^2 f_X(x)dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} 2\left(q_j - x\right) f_X(x)dx \end{aligned}$$

Imponendo la condizione necessaria per un estremo si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{E}\left[e_q^2(X)\right]=0 \underset{f_X(x_j)\neq 0}{\Rightarrow}\left(q_{j-1}-x_j\right)^2=\left(q_j-x_j\right)^2 \Rightarrow x_j=\frac{q_{j-1}+q_j}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\mathrm{E}\left[e_q^2(X)\right]=0 \Rightarrow q_j\int_{x_j}^{x_{j+1}} f_X(x)dx=\int_{x_j}^{x_{j+1}} xf_X(x)dx \Rightarrow q_j=\mathrm{E}\left[X \mid x_j<X\le x_{j+1}\right]$$

Al variare di j si ottengono le equazioni da risolvere per determinare la legge di quantizzazione ottima nel senso della minima potenza del processo di rumore di quantizzazione (che è una forma di approssimazione).

Considerando infine il caso particolare in cui la variabile da quantizzare assuma valori uniformi all'interno dell'intervallo $\left[-V,V\right]$ si ottiene:

$$q_j=\mathrm{E}\left[X \mid x_j<X\le x_{j+1}\right]=\frac{\int_{x_j}^{x_{j+1}} xf_X(x)dx}{\int_{x_j}^{x_{j+1}} f_X(x)dx}=\frac{\int_{x_j}^{x_{j+1}} x\frac{1}{2V}dx}{\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{2V}dx}=\frac{\frac{x_{j+1}^2}{2}-\frac{x_j^2}{2}}{x_{j+1}-x_j}=\frac{x_{j+1}+x_j}{2}$$

Ovvero

$$\begin{aligned} x_0 &= -V \\ x_M &= V \\ x_j &= \frac{q_{j-1}+q_j}{2} \\ q_j &= \frac{x_{j+1}+x_j}{2} \end{aligned}$$

che è agevole verificare che corrisponde alla soluzione presentata sul testo (fig. 2.5 nel caso di $M=8$):

$$\Delta = 2V/M$$

$$x_i=x_0+i\Delta=-V+\frac{2i}{M}V$$

$$q_i=-V+\frac{\Delta}{2}+i\Delta=-\frac{M-1}{M}V+\frac{2i}{M}V$$
